

辐射治疗能区内电子束在轻介质 中的平均能量计算

蒋 彬 罗正明

(四川联合大学原子核科学技术研究所辐射物理中心, 成都 610064)

摘要 从高能电子在多成分介质中输运的 Boltzmann 方程出发, 采用 Fokker-Planck 近似导出电子束能量分布的高斯谱, 对连续慢化近似(CSDA)进行修正从而引入修正的 CSDA 平均能量, 并采用杨振宁的多次散射理论, 最后给出一个计算高能电子束平均能量的递推-迭代算法。并给出了由该算法得出的部分计算结果, 并与相应的 Monte-Carlo 模拟及实验测量作了比较, 比较的结果表明该算法能够较为精确地计算高能电子束在轻介质中的平均能量变化。此外, 还讨论了在辐射治疗剂量算法中最常见的电子束平均能量计算公式, 即 Harder 公式和 Brahme 公式, 并提出了一个较这两个公式更为精确的半经验公式。

关键词 电子束平均能量, 辐射治疗, 辐射剂量, 电子束剂量学

电子束辐射治疗的效果依赖于计算机计划系统的剂量计算精度, 而电子束平均能量的计算对剂量分布的计算有显著的影响, 因此, 平均能量是电子束辐射治疗剂量学中的一个重要基本参数。目前的各种电子剂量算法通常采用简单的 Harder 公式或 Brahme 公式来计算电子束平均能量^[1-6]。这两个公式都是根据连续慢化近似(CSDA)并对电子的阻止本领作近似后导出的。由于忽略了电子束的能量损失歧离以及多次散射效应, Harder 公式在形式上是线性的, Brahme 公式给出的结果也近似于线性。实际上在辐射治疗能区内(1—50 MeV), 电子束的能量损失歧离和多次散射效应都不容忽视, 电子束平均能量随穿透深度的变化并不是线性的, 特别是在电子的后半射程近于指数衰减。因此, Harder 公式在电子束的整个穿透过程中, 以及 Brahme 公式在大深度范围内, 都严重偏离了电子束的实际平均能量, 从而给电子束的剂量分布计算带来较大的误差^[8]。

Monte-Carlo 方法或比较完善的解析理论都可以用来计算电子束的平均能量, 并给出相当精确的结果, 但往往比较复杂, 要花费较多的计算时间^[7,8]。因此, 本文将基于电子输运的 Boltzmann 方程, 修改连续慢化近似, 提出一个较为快速准确的计算高能电子束平均能量的解析算法。此外, 为了便于日常治疗计划中剂量计算的实际应用, 本文根据 Harder 公式和 Brahme 公式进一步给出一个更好的近似公式。

在本文的第1部分中, 首先从高能电子在多成份介质中输运的 Boltzmann 方程出发, 导出电子束的能谱, 然后在第2部分中给出电子束平均能量计算的新算法, 并将该算法算出的结果与 Monte Carlo 数据和实验值作了比较。在第3部分中, 分析了 Harder 公式和 Brahme 公式, 并在此基础上提出一个新的近似公式。

收稿日期: 初稿 1993-11-01, 修改稿 1994-04-27

1 高能电子束的能量分布

假定一个单能无限宽平行电子束垂直入射到半无限均匀靶介质表面, 入射电子在介质表面的能量为 E_0 。靶介质由多种成分组成(化合物或混合物), 其中原子序数为 Z_i 的组分原子的数密度为 N_i 。在辐射治疗的能区内, 作者只考虑电子和靶介质之间的三种主要相互作用, 即电子和靶核的弹性散射、靶原子核外电子的非弹性碰撞以及电子的韧致辐射, 并可以忽略弹性碰撞过程中的能量交换, 以及电子发射韧致辐射光子后的方向变化^[8]。基于上述考虑, 并注意到全同粒子效应, 高能电子在多成份介质中输运的 Boltzmann 方程可以写为

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \nabla f = & \sum_i N_i \int_{4\pi} d\vec{u}' [\vec{f}(\vec{r}, \vec{u}', E) - f(\vec{r}, \vec{u}, E)] \sigma_{ei}(\vec{u}, \vec{u}') \\ & + \sum_i N_i Z_i \left[\int_E^{E_0} dE' \vec{f}(\vec{r}, \vec{u}', E') \sigma_e(E', E' - E, \vec{u}, \vec{u}') - f(\vec{r}, \vec{u}, E) \int_0^{E/2} \sigma_e(E, T) dT \right] \\ & + \sum_i N_i \left[\int_E^{E_0} dE' \vec{f}(\vec{r}, \vec{u}, E') \sigma_{ri}(E', E' - E) - f(\vec{r}, \vec{u}, E) \int_0^E \sigma_{ri}(E, T) dT \right] \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$E_0 = \begin{cases} E_0 & E > E_0/2 \\ 2E & E \leq E_0/2 \end{cases} \quad (2)$$

σ_{ei} 是入射电子在第 i 种靶原子核 Coulomb 场中的弹性散射微分截面; σ_e 是入射电子与靶电子之间的非弹性散射微分截面; σ_{ri} 是电子在第 i 种组分介质中的韧致辐射微分截面; $f(\vec{r}, \vec{u}, E)$ 是电子关于角度和能量的微分注量。

令 $f(s, \vec{u}, E) = f(\vec{r}, \vec{u}, E)$, 其中 s 为电子的实际径迹长度。对方程(1)中的方向 $\vec{u}$ 在 4π 空间积分, 并注意到

$$N(s, E) = \int_{4\pi} d\vec{u} f(s, \vec{u}, E) \quad (3)$$

是电子束的能谱, 于是方程 (1)变为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s} N(s, E) = & \sum_i N_i Z_i \left[\int_E^{E_0} dE' N(s, E') \sigma_e(E', E' - E) - N(s, E) \int_0^{E/2} \sigma_e(E, T) dT \right] \\ & + \sum_i N_i \left[\int_E^{E_0} dE' N(s, E') \sigma_{ri}(E', E' - E) - N(s, E) \int_0^E \sigma_{ri}(E, T) dT \right] \end{aligned} \quad (4)$$

引入 Fourier 变换

$$\begin{cases} \tilde{N}(s, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iPE} N(s, E) \\ N(s, E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dP e^{iPE} \tilde{N}(s, P) \end{cases} \quad (5)$$

之后, 方程(4)为

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{N}(s, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iPE} N(s, E) \left[\sum_i N_i Z_i \int_0^{E/2} dT (e^{iPT} - 1) \sigma_e(E, T) + \sum_i N_i \int_0^E dT (e^{iPT} - 1) \sigma_{ri}(E, T) \right] \quad (6)$$

将 e^{iPT} 按交换能量展开到二阶

$$e^{iPT} \simeq 1 + iPT - \frac{P^2}{2} T^2 \quad (7)$$

代入方程(6) 中有

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{N}(s, P) = iP \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iPE} N(s, E) S_{tot}(E) - \frac{P^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iPE} N(s, E) Q_{tot}(E) \quad (8)$$

其中 S_{tot} 是电子总的阻止本领

$$S_{tot}(E) = S_{col}(E) + S_{rad}(E) = \sum_i N_i Z_i \int_0^{E/2} dT \sigma_e(E, T) T + \sum_i N_i \int_0^E dT \sigma_{ri}(E, T) T \quad (9)$$

Q_{tot} 是总的能量损失歧离

$$Q_{tot}(E) = Q_{col}(E) + Q_{rad}(E) = \sum_i N_i Z_i \int_0^{E/2} dT \sigma_e(E, T) T^2 + \sum_i N_i \int_0^E dT \sigma_{ri}(E, T) T^2 \quad (10)$$

使用窄能谱近似(NESA)后, 方程(8) 可以写为

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{N}(s, P) = iP S_{tot}[E_*(s)] \tilde{N}(s, P) - \frac{P^2}{2} Q_{tot}[E_*(s)] \tilde{N}(s, P) \quad (11)$$

式中 $E_*(s)$ 是电子束在径迹长度 s 处的平均能量。窄能谱近似是由罗正明等人首先提出的^[8,9]。其基本思想是: 如果带电粒子束的能谱相对其平均能量足够窄, 那么在一个积分中与能谱相乘的相互作用截面可以在平均能量附近作 Taylor 展开, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(s, E) U(E) dE \simeq U[E_*(s)] \int_{-\infty}^{\infty} N(s, E) dE \quad (12)$$

这里, $N(s, E)$ 是带电粒子束的能谱, $U(E)$ 是带电粒子和介质原子相互作用的任何函数。在辐射治疗能区内, 电子束的能谱展宽在大部分射程内都比较小, 因此使用这个近似是合理的。

考虑到单能入射电子束的初始能谱为 δ 谱, 可以从方程(11) 得出

$$\tilde{N}(s, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -iPE_0 + iP \int_0^s S_{tot}[E_*(t)] dt - \frac{P^2}{2} \int_0^s Q_{tot}[E_*(t)] dt \right\} \quad (13)$$

对连续慢化近似(CSDA)进行修正, 可以引入一个新的概念, 即修正的 CSDA 平均能量 $E_c(s)$

$$E_c(s) = E_0 - \int_0^s S_{tot}[E_*(t)] dt \quad (14)$$

注意到式中阻止本领的自变量是电子束的实际平均能量 $E_*(s)$, 因此修正 CSDA 平均能量和通常的 CSDA 平均能量在计算方法上略有不同。此外, 它的定义域也从 $z=0 \rightarrow R_0$ (R_0 为 CSDA 射程) 拓展到 $z=0 \rightarrow \infty$ 。只不过 $z > R_0$ 时其值为负, 这时 E_c 仅是一个参数, 不具有实际的物理含义,

还定义

$$\Omega(s) = \int_0^s Q_{tot}[E_e(t)]dt \quad (15)$$

于是(13)式变为

$$\tilde{N}(s, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-iP E_c(s) - \frac{P^2}{2} \Omega(s)\right] \quad (16)$$

对上式作 Fourier 逆变换, 可以得到电子的能谱

$$N(s, E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega}} \exp\left[-\frac{(E - E_c)^2}{2\Omega}\right] \quad (17)$$

易见, 得到的电子能量分布是一个高斯谱, 其平均值为 $E_c(s)$, 方差为 $\Omega(s)$; 对于高能电子在介质中的深穿透情形, 用高斯分布来描述电子能谱是可行的。

2 电子束平均能量算法

根据定义, 电子束的实际平均能量为

$$E_e(s) = \int_0^\infty N(s, E) E dE / \int_0^\infty N(s, E) dE \quad (18)$$

将(17)式代入上式后可以得到

$$E_e(s) = E_c(s) + \sqrt{\frac{2\Omega}{\pi}} e^{-E_c^2/2\Omega} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{E_c}{\sqrt{2\Omega}}\right) \right] \quad (19)$$

式中 erf 是误差函数。公式(19)与公式(14)、(15)构成了一个封闭的循环, 因此在实际计算中, 引入一个递推-迭代关系, 将电子的径迹长度分为许多小区间, 于是这三个公式可以离散为

$$E_c(s_k) = E_c(s_{k-1}) - \frac{\Delta s}{2} \{S_{tot}[E_e(s_{k-1})] + S_{tot}[E_e(s_k)]\} \quad (20)$$

$$\Omega(s_k) = \Omega(s_{k-1}) + \frac{\Delta s}{2} \{Q_{tot}[E_e(s_{k-1})] + Q_{tot}[E_e(s_k)]\} \quad (21)$$

$$E_e(s_k) = E_c(s_k) + \sqrt{\frac{2\Omega(s_k)}{\pi}} e^{-E_c^2(s_k)/2\Omega(s_k)} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{E_c(s_k)}{\sqrt{2\Omega(s_k)}}\right) \right] \quad (22)$$

上述方程的初始条件为 $E_e(s_0) = E_c(s_0) = E_0, \Omega(s_0) = 0$, 其中 $s_0 = 0$ 。令 $E_e^{(0)}(s_k) = E_e(s_{k-1})$, 代入(20)、(21)式中求出 $E_c^{(0)}(s_k)$ 和 $\Omega^{(0)}(s_k)$, 然后再将 $E_c^{(0)}(s_k)$ 和 $\Omega^{(0)}(s_k)$ 代入(22)式中求出 $E_e^{(1)}(s_k)$ 。同样, 可以由 $E_e^{(1)}(s_k)$ 求出 $E_e^{(2)}(s_k)$, 直到 $E_e^{(m)}(s_k)$, 使 $|E_e^{(m)}(s_k) - E_e^{(m-1)}(s_k)| / E_e^{(m)}(s_k) < \varepsilon$ 成立(ε 是设定的误差限)。这时, 可以认为 $E_e(s_k) = E_e^{(m)}(s_k)$ 。

为了得到电子束平均能量沿穿透深度的变化, 使用杨振宁的径迹曲折分布理论。径迹曲折分布就是电子束在某个穿透深度处的径迹长度分布, 杨振宁曾采用小角近似导出一个标度公式^[10]

$$Y(v) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} v^{-3/2} [\exp(-1/v) - 3 \exp(-9/v)] & v \leq 2 \\ -\frac{\pi}{4} \exp(-\pi^2 v/16) & v > 2 \end{cases} \quad (23)$$

其中 v 为标度参数。由于杨振宁的理论忽略了电子的能量损失, 必须作一些修正才能用于深穿透情形。考虑了电子的能量损失后, 可以利用 Fermi-Eyges 理论重新写出标度参数^[11]

$$v = (s - z)/A_1(z) \quad (24)$$

式中 z 为电子的穿透深度, $A_1(z)$ 是电子束散射本领的一阶矩, 其定义由参考文献[11]给出。于是得到电子束平均能量随穿透深度的变化

$$E_e(z) = \int_0^\infty Y(v) E_e[s(v, z)] dv \quad (25)$$

其中

$$s(v, z) = z + v A_1(z) \quad (26)$$

计算了 10 MeV、20 MeV 和 30 MeV 的电子束在均匀水模中平均能量随穿透深度的变化, 计算结果分别给出在图 1、图 2 和图 3 中, 并和 Monte Carlo 模拟数据作了比较^[6,7]。由于 Monte Carlo 方法给出的结果比较精确, 在实验数据缺乏的情形下, 可以用该方法对解析算法进行初步的检验。从图中可以看出, 当入射能量为 10 MeV 时, 本文的算法与 Monte Carlo 方法在电子束穿透的整个过程中都符合得相当好; 当入射能量为 20 MeV 和 30 MeV 时, 在电子的前半射程, 本结果与 Monte Carlo 数据符合得非常好, 接近电子射程末端时符合程度稍差一些, 但变化趋势仍是一致的。此外, 还计算了 20 MeV 电子束在碳(密度为 1.8 g/cm^3)中穿透时平均能量随深度的变化, 并和 Harder 的实验结果作了比较^[1], 如图 4 所示。同样, 本文的计算结果在实验误差范围内与测量值符合相当好。

应当指出的是, 杨振宁的径迹长度分布理论是建立在小角近似基础上的。由于采用该理论来考虑多次散射效应, 本文算法的适用范围是高能电子入射轻元素组成的介质。在肿瘤的辐射治疗技术中, 所用的电子束能量都比较高(1—50 MeV), 处理的介质(人体)也主要由轻元素组成, 因此本文的算法可以用于辐射治疗的剂量计算。

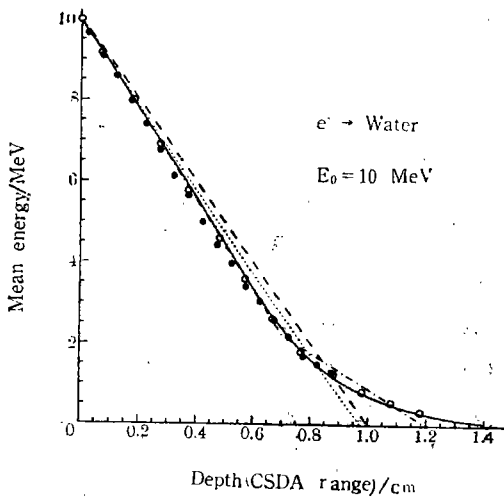


Fig 1. Mean energy of 10 MeV electrons in water versus penetrating depth
(—) calculated with present algorithm,
(---) calculated with Harder formula^[1],
(...) calculated with Brahme formula^[2],
(-.-) calculated with formula (31),
(○) Monte Carlo simulated by Bruinvis et al^[6], (●) Monte Carlo simulated by Andreo and Brahme^[7]

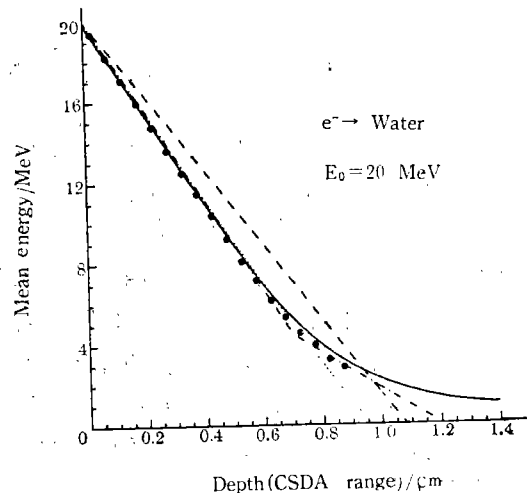


Fig 2. Mean energy of 20 MeV electrons in water versus penetrating depth
(—) calculated with present algorithm,
(---) calculated with Harder formula^[1],
(...) calculated with Brahme formula^[2],
(-.-) calculated with formula (31),
(●) Monte Carlo simulated by Andreo and Brahme^[7]

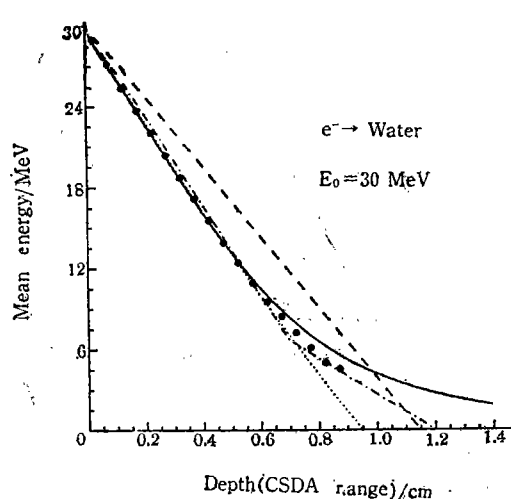


Fig 3. Mean energy of 30 MeV electrons in water versus penetrating depth
(—) calculated with present algorithm,
(---) calculated with Harder formula^[1],
(...) calculated with Brahme formula^[2],
(-.-) calculated with formula (31),
(●) Monte Carlo simulated by Andreo and Brahme^[7]

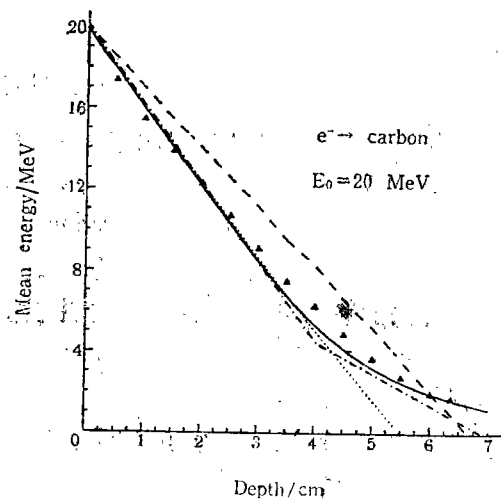


Fig 4. Mean energy of 20 MeV electrons in carbon versus penetrating depth
(—) calculated with present algorithm,
(---) calculated with Harder formula^[1],
(...) calculated with Brahme formula^[2],
(-.-) calculated with formula (31),
(▲) measured by Harder^[1]

3 计算电子束平均能量的近似公式

在电子束辐射治疗的剂量算法中, 电子束平均能量的计算普遍采用 Harder 公式^[1,3,4]

$$E_s(Z) = E_0(1 - z/R_p) \quad (27)$$

式中 R_p 是电子束的实际射程, Brahme 等人曾给出一个拟合公式^[12]

$$R_p = a + bE_0 + cE_0^2 \quad (28)$$

其中拟合参数 $a = -0.11 \text{ cm}$, $b = 0.505 \text{ cm/MeV}$, $c = -0.0003 \text{ cm/MeV}^2$ 。公式(28)在辐射治疗能区内与实验数据的符合程度好于 1%。

实际上, Harder 公式忽略了电子阻止本领随电子能量的变化, 并采用了连续慢化近似。本文把采用公式(27)和(28)计算出的电子平均能量也给出在图 1 至图 4 中。容易看出, 在电子穿透的大部分射程范围内, Harder 公式都严重偏离 Monte Carlo 值或实验数据。由此可见, Harder 公式是一个相当粗糙的近似公式。

Brahme 假定在辐射治疗能区内电子的碰撞阻止本领是一个常数, 而辐射阻止本领随能量线性变化, 并且也使用连续慢化近似, 从而导出一个较 Harder 公式更为精确的电子束平均能量公式^[2]

$$E_s(z) = E_0 \left[1 - \frac{S_{\text{tot}}(E_0)}{S_{\text{rad}}(E_0)} (1 - e^{-zS_{\text{rad}}(E_0)/E_0}) \right] \quad (29)$$

图 1 至图 4 中给出了用 Brahme 公式计算的电子束平均能量值。易见该公式较之 Harder 公式已有很大的改进, 特别是在电子的前半射程, Brahme 公式算出的结果基本上与 Monte Carlo 数据或实验值是符合的。从图中看出, Brahme 公式给出的结果在趋势上仍近于线性。将公式(29)

中的指数项展开到二阶, 则有

$$E_s(Z) \simeq E_0 - zS_{tot}(E_0) \left[1 - \frac{S_{rad}(E_0)}{2E_0} z \right] \quad (30)$$

方括号中第二项表征了平均能量和穿透深度的非线性关系, 但在辐射治疗能区, $S_{rad}(E)/E_0 \simeq 0.02 \text{ cm}^{-1}$, 并和能量基本无关。由此可见, Brahme 公式中非线性项对平均能量的影响非常小。

总的来说, 在电子束射程末端 Brahme 公式仍远远偏离电子束的实际平均能量, 不再适用。因为这时的能量损失歧离效应和多次散射效应不容忽视。由于较好地考虑了这两个效应, 上一节中给出的算法能够比较精确地计算电子束在整个穿通过程中的平均能量变化。当然, 在日常治疗计划的剂量算法中, 简单的计算公式也有其优点。鉴于此, 本文在 Harder 公式和 Brahme 公式的基础上提出一个新的半经验公式

$$E_s(z) = \begin{cases} E_0[1 - z/(0.9 R_0)] & 0 \leq z \leq 0.7 R_0 \\ \frac{2}{9} E_0[(1 - (z - 0.7 R_0)/(0.5 R_0))] & 0.7 R_0 \leq z \leq 1.2 R_0 \end{cases} \quad (31)$$

该公式由两部分组成, 因而给出的平均能量与深度的关系是一条折线, 如图 1 至图 4 所示。易见公式(31)与对比数据的符合程度已大大好于 Harder 公式和 Brahme 公式。

参 考 文 献

- 1 Harder D. in "Symposium on high energy electrons", edited by Zuppinger A and Poretti G. Springer, Berlin, 1965, pp. 26—33
- 2 Brahme A. National Inst. of Rad. Prot. Rep., Stockholm, Sweden, 1975, SSI: 1975—011
- 3 Hogstrom K R, Mills M D, Almond P R. Phys. Med. Biol., 1981, (26): 445
- 4 Jette D. Med. Phys., 1988, (15): 128
- 5 McLellan J et al. Med. Phys., 1991, (18): 1
- 6 Bruinvis I A D, Mathol W A F, Andreo P. Phys. Med. Biol., 1989, (34): 491
- 7 Andreo P, Brahme A. Med. Phys., 1981, (8): 682
- 8 罗正明, Brahme A., Phys. Rev., 1992, (B46): 15739
- 9 罗正明, 滕礼坚. 物理学报, 1982, (31): 1166
- 10 Yang C N. Phys. Rev., 1951, (84): 599
- 11 蒋 彬, 罗正明. 四川大学学报(自然科学版), 1994, (3): 329
- 12 Brahme A, Kraepelien T, Svensson H. Acta Radiol. Oncol., 1980, (19): 305

(下转第 213 页 Continued to P213)

A COMPARISON OF ABSORBED DOSE SIMULATED BY COMPUTER AND MEASURED EXPERIMENTALLY FOR ELECTRON BEAM

Wang Chuanshan Luo Wenyun Xu Mengjie Zhou Shuxin Feng Yongxiang

(Shanghai Applied Radiation Institute, Shanghai University of Science
and Technology, Shanghai 201800)

Zhang Limin Gu Jiqing

(Shanghai Institute of Metrology Technology, Shanghai 200233)

ABSTRACT A semiempirical code ED 510 which can simulate depth-dose distribution of the energy deposition of electron beam in multilayer absorbers is described in this paper. The absorbed dose of electron beam computed by ED 510 code is compared with the experimental result that measured by graphite absorbed-dose calorimeter, and their deviation is between 3%.

KEYWORDS ED 510 code, Graphite calorimeter, Radiation processing,
Depth-dose distribution

(上接第 238 页 Continued from P238)

THE CALCULATION OF MEAN ENERGY FOR ELECTRON BEAM IN THE ENERGY RANGE OF RADIO THERAPY IN LIGHT MEDIA

Jiang Bin Luo Zhengming

(Center for Radiation Physics, Institute of Nuclear Science and Technology,
Sichuan Union University, Chengdu 610064)

ABSTRACT In this paper, a Gaussian distribution for electron energy is deduced by Fokker-Planck approximation to the Boltzmann equation for high-energy electrons penetrating in multi-constituents media, then a recursion-iteration algorithm for the mean energy calculation of high-energy electron beam is obtained after introducing the modified CSDA mean energy and using Yang's multiple scattering theory. Some calculational results of this algorithm are also given in the article, and compared with corresponding data of Monte Carlo simulations and experimental measurements. The comparison shows that the algorithm can precisely predict the mean energy of high-energy electron beam penetrating in light media. Furthermore, two common formulae for electron beam mean energy calculation in radiotherapy dose algorithms, i. e., the Harder formula and Brahme formula, are discussed, and a more accurate semi-empirical formula is recommended in this paper as well.

KEYWORDS Mean energy of electron beam, Radiotherapy, Radiation doses,
Electron beam dosimetry